Θεώρημα: (Κανόνας De L'Hospital) σε πλήρη γενικότητα.

Αν $\lim_{x\to k} f(x)=b$ και $\lim_{x\to k} g(x)=b$

($g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$ σε μια περιοχή του k)

και $\lim_{x\to k}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$

Τότε, $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

Όπου k είναι είτε a, a^+, a^- (με $a\in\mathbb{R}$) ή $-\infty$ ή $+\infty$

$b=0$ ή $+\infty$ ή $-\infty$

$\ell\in\mathbb{R}$ ή $\ell=+\infty$ ή $\ell=-\infty$.

Σημείωση: Αν το όριο της $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, το θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Υπάρχουν παραδείγματα της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και το όριο $\frac{f(x)}{g(x)}$ να υπάρχει, αλλά το όριο $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ να μην υπάρχει.

Παραδείγματα:

1) $\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

$f(x)=\cos x \quad \lim_{x\to\pi/2} f(x)=0$

$g(x)=\pi-2x \quad \lim_{x\to\pi/2} g(x)=0$

$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\sin x}{-2}=\frac{\sin x}{2} \qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\sin(\pi/2)}{2}=1/2.$

Από κανόνα De L'Hospital υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)}{g(x)}$ και είναι ίσο με $1/2$. Δηλαδή, $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=1/2$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

α' τρόπος:

$f(x)=1-\cos x$ $\quad f'(x)=\sin x$ $\quad f''(x)=\cos x$

$g(x)=x\sin x$ $\quad g'(x)=\sin x+x\cos x$ $\quad g''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

$\lim_{x\to 0}1-\cos x=0$ $\quad \lim_{x\to 0}\sin x=0$

$\lim_{x\to 0}x\sin x=0$ $\quad \lim_{x\to 0}(\sin x+x\cos x)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}$ Εφαρμόζοντας το DLH προκύπτει $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1/2$ και
Εφαρμόζοντας το DLH προκύπτει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1/2$.

Παρατήρηση:

β' τρόπος: Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπολογίζεται εύκολα χωρίς χρήση DLH

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Το αρχικό όριο υπολογίζεται επίσης χωρίς χρήση DLH.

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1}{2}.$$

γ' τρόπος:

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\xrightarrow{x\to 0}1/2.$$

3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)\log x=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty.$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$.

Προσοχή! Ο κανόνας DLH δεν εφαρμόζεται γιατί δεν είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

4) $\lim_{x\to 0}(1+bx+ax^2)^{1/x}$

$(1+bx+ax^2)^{1/x} = e^{\log(1+bx+ax^2)^{1/x}} = e^{1/x\log(1+bx+ax^2)}$

Θέτουμε $f(x)=\log(1+bx+ax^2)$ $\quad f'(x)=\dfrac{2ax+b}{1+bx+ax^2}$

$g(x)=x$ $\quad g'(x)=1$

$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{\uparrow}{=} \log(\lim_{x\to 0}(1+bx+ax^2)) = \log 1 = 0$

Η log συνεχής

$\lim_{x\to 0} g(x)=0$

Από κανόνα DLH $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b.$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{b}{1} = b.$

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+bx+ax^2)}{x}} = e^b$

Δηλαδή, $\lim_{x\to 0}(1+bx+ax^2)^{1/x} = e^b.$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{e^x-1}$

$f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$ $\quad f'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})+x^2\cos(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})$

$g(x)=e^x-1$ $\quad g'(x)=e^x$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ Το όριο της $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ στο 0 δεν υπάρχει

$\lim_{x\to 0} g(x)=0$ Άρα, ο κανόνας DLH δεν εφαρμόζεται.

Όμως, $\dfrac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{e^x-1} = \dfrac{x\sin(\frac{1}{x})}{\frac{e^x-1}{x}} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{0}{1} = 0.$

HW

6) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{xe^x(e^x-1)}$

$f(x)=e^x-1-e^x\cdot x \qquad f'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$

$g(x)=x\cdot e^x(e^x-1) \qquad g'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-e^x-xe^x=e^x(e^x+2xe^x-1-x)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1-1-0=0$

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0-0=0$

$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-xe^x}{e^x(e^x+2xe^x-1-x)}=\frac{-x}{e^x+2xe^x-1-x}$

$f_1(x)=-x \qquad f_1'(x)=-1$

$g_1(x)=e^x+2xe^x-1-x \qquad g_1'(x)=e^x+2e^x+2xe^x-1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}=-\frac{1}{2}$ Από κανόνα DLH προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=-\frac{1}{2}$.

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\frac{1}{2}$. Άρα, από κανόνα DLH προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$.

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=-\frac{1}{2}$.

Θεώρημα: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη,
x_0 εσωτερικό σημείο του I ώστε $f'(x_0)=0$.

α) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0)>0$ τότε η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο x_0.

β) Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0)<0$ τότε η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο x_0.

Απόδειξη:

α) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$

Επειδή $f''(x_0)>0$ $\exists\delta>0$ ώστε $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

$\to$ Για $x\in(x_0-\delta,x_0)$ $\quad \left.\begin{array}{l} x-x_0<0 \\ \frac{f'(x)}{x-x_0}>0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)<0$

→ Για $x\in(x_0,x_0+\delta)$ $\left.\begin{array}{l} x-x_0>0 \\ \dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)>0$

Έστω τυχόν $y\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ και θα δείξουμε ότι $f(y)>f(x_0)$

1) Για $y\in(x_0-\delta,x_0)$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ. στο $[y,x_0]$

$\exists x\in(y,x_0)$ ώστε $f(x_0)-f(y)=f'(x)(x_0-y)\Rightarrow f(x_0)<f(y)$.

2) Για $y\in(x_0,x_0+\delta)$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ. στο $[x_0,y]$

$\exists x\in(x_0,y)$ ώστε $f(y)-f(x_0)=f'(x)(y-x_0)\Rightarrow f(y)>f(x_0)$

β) Για την $-f$ ισχύει $(-f)''(x_0)>0$

$\overset{\alpha)}{\Longrightarrow}$ Η $-f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\Rightarrow$ Η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

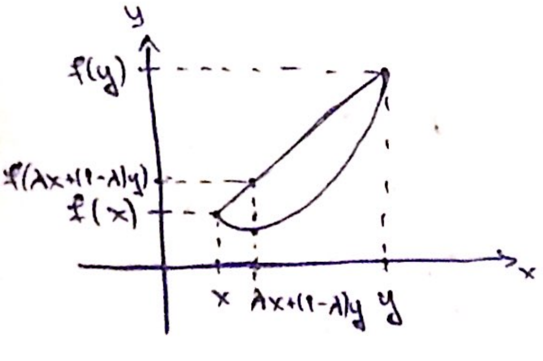
Ορισμός: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, I διάστημα, $I\subseteq A$. Λέμε ότι η f είναι:

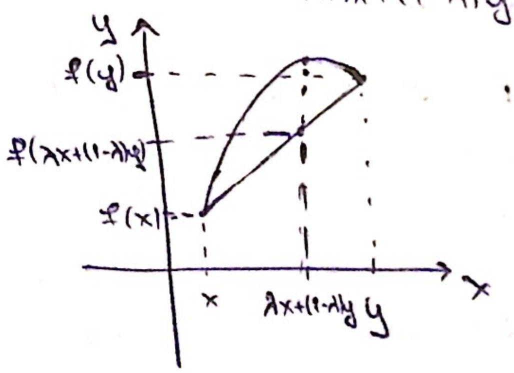
α) κυρτή στο I αν $\forall x,y\in I$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

β) Γνησίως κυρτή στο I αν $\forall x,y\in I$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

γ) κοίλη στο I αν $\forall x,y\in I$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

δ) Γνησίως κοίλη στο I αν $\forall x,y\in I$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$





Αποδεικνύεται ότι: Αν $f:I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in I$.

→ Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε η εφαπτομένη της f στο σημείο x_0, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

→ Αν η f είναι γνησίως κυρτή: $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

→ Αν η f είναι κοίλη στο I, τότε η εφαπτομένη της f στο σημείο x_0, βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

→ Αν η f είναι γνησίως κοίλη: $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Θεώρημα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.

α) Αν $f''(x) > 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.

β) Αν $f''(x) < 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο I.

Ορισμός: $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 εσωτερικό σημείο του I.

Λέμε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 αν $\exists \delta > 0$

f κυρτή στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, x_0 + \delta)$

ή f κοίλη στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, x_0 + \delta)$

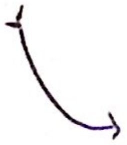
Σημείωση: Η μονοτονία και η κυρτότητα μιας συνάρτησης πρέπει να μελετώνται από κοινού.

▸ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Λύνουμε τις εξισώσεις $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$.

Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ οι αριθμοί που είναι λύσεις είτε της μιας είτε της άλλης.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_k, +\infty)$ βρίσκου
με το πρόσημο των f', f''.

Αν $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ στο I τότε η f αύξουσα και κυρτή στο I.	Αν $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ στο I τότε η f αύξουσα και κοίλη στο I.	Αν $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ στο I τότε η f φθίνουσα και κυρτή στο I.	Αν $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$ στο I τότε η f φθίνουσα και κοίλη στο I.
			

Παράδειγμα: Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x$.

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

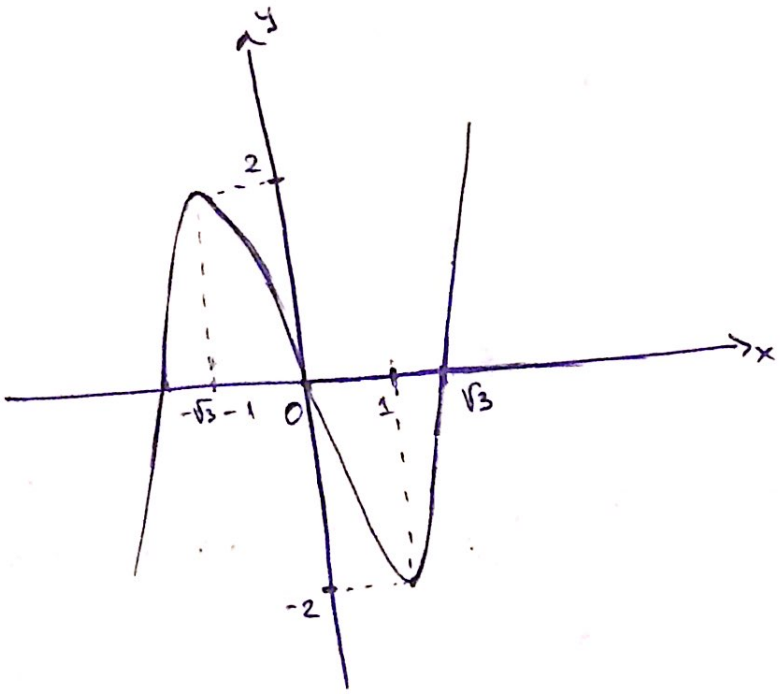
$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	



Η f έχει τοπικό μέγιστο στο -1 με τιμή $f(-1)=2$.

Στο 0 η f έχει σημείο καμπής.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 1 με τιμή $f(1)=-2$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\beta$ τότε λέμε ότι η $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Η $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha\neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ αν $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\alpha x+\beta)]=0$

Πως εξετάζουμε αν η f έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=\beta$ τότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]$. Αν υπάρχει και είναι ίσο με $\beta\in\mathbb{R}$ τότε η $y=\alpha x+\beta$ είναι (οριζόντια αν $\alpha=0$) πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Ομοίως ορίζονται και οι οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

→ Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη από τα δεξιά στο α.

→ Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη από τα αριστερά στο α.

HW Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\log x}{x}$.